INF721

2023/2

UFV

Aprendizado em Redes Neurais Profundas

A3: Regressão Logística

Logística

Avisos

- Aula A2 - Aprendizado de Máquina publicada no site [slides, vídeo]
- Aceitar o convite para o Slack!

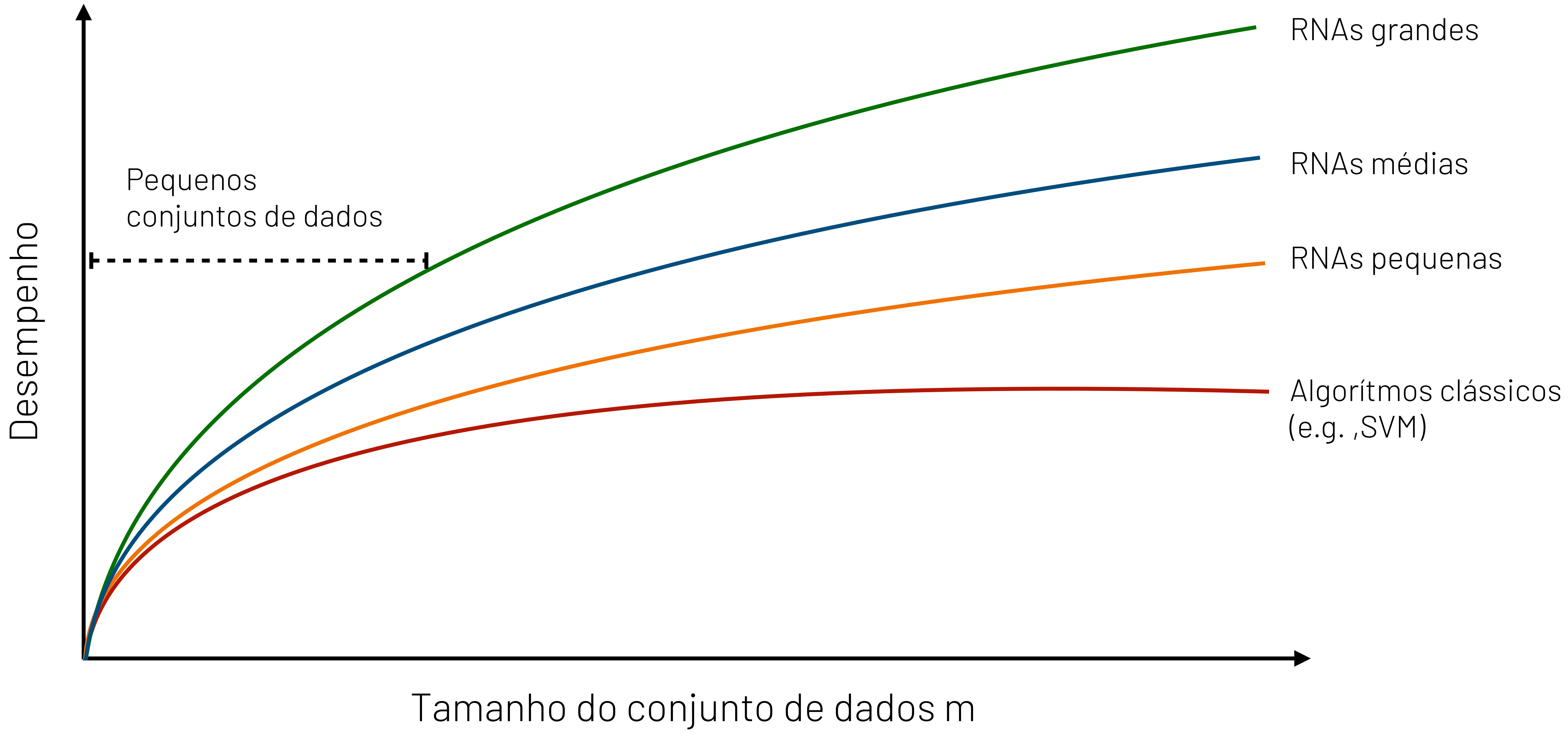
Última aula

- Tipos de aprendizado e de dados;
- Espaço de hipóteses e generalização.

Plano de Aula

- Regressão logística como um neurônio artificial
- Sucesso das redes neurais artificiais
- Combinação linear de pesos e entradas
- Função de ativação
- Função de perda

O sucesso das Redes Neurais Artificiais (RNAs)



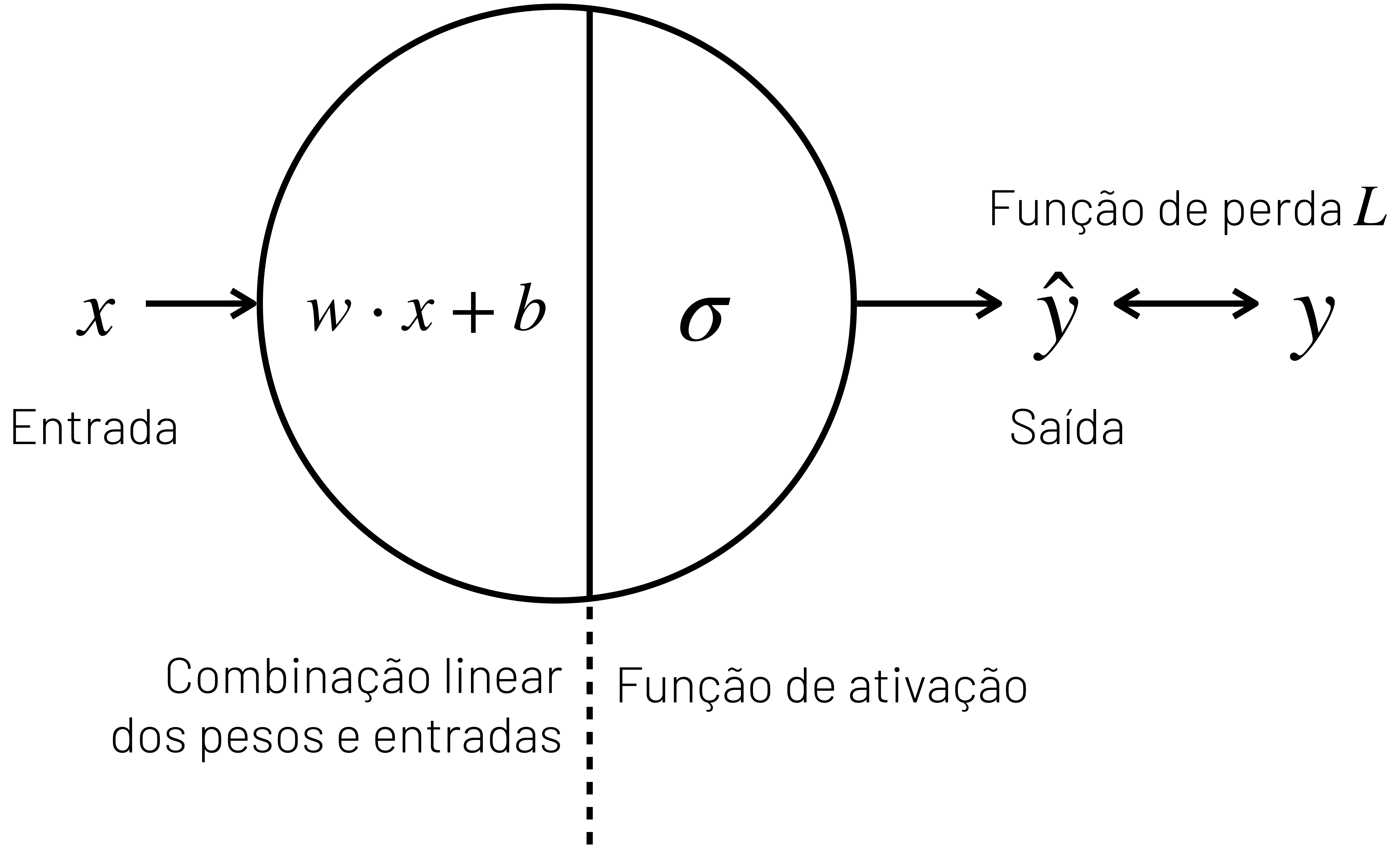
UFV

O sucesso das Redes Neurais Artificiais (RNAs)

- Grandes volumes de dados
- Computação em GPUs e TPUs
- Frameworks de derivação automática
- Novos algoritmos

Regressão Logística

Algorítmo clássico de classificação binária que pode ser visto como um neurônio artificial de uma RNA



Regressão Logística

Entrada

Um exemplo $x \in \mathbb{R}^d$

Saída

A probabilidade de x ser da classe $y = 1$

$\hat{y} = P(y = 1 \,|\, x),\ 0 \leq \hat{y} \leq 1$

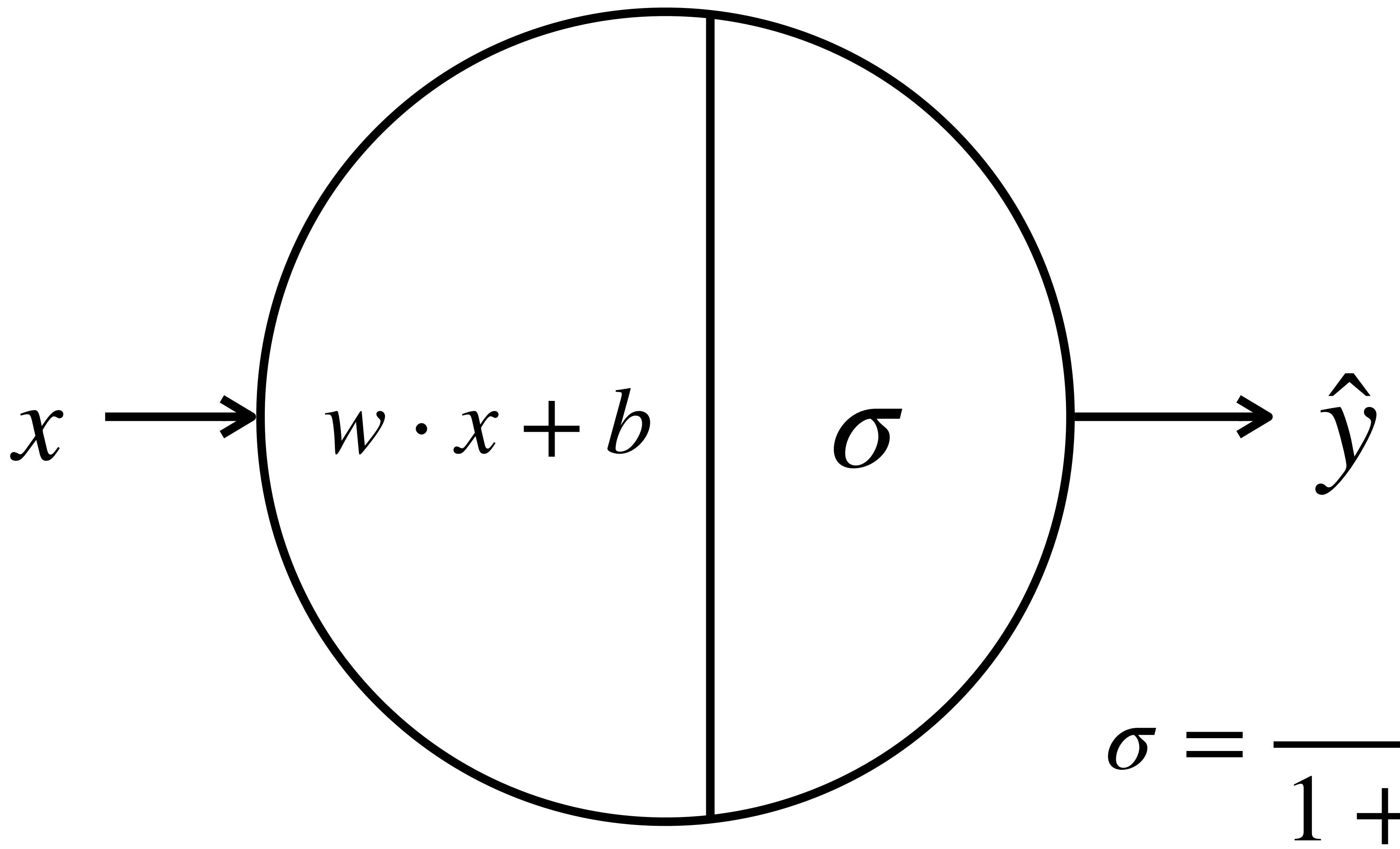
Hipótese

$h(x) = \sigma(w \cdot x + b)$

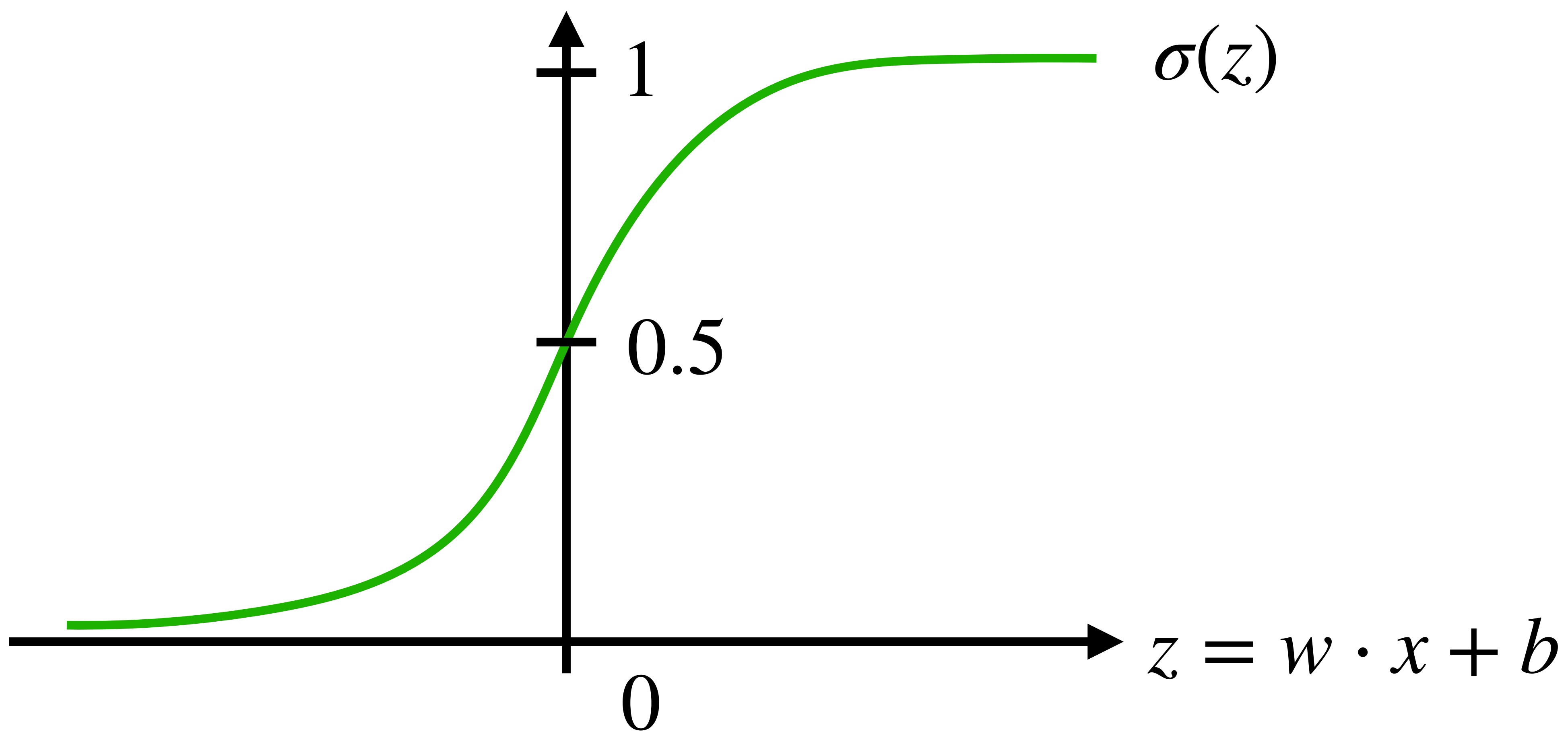
onde:

$w \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$ são pesos

σ é a função logística (sigmoide)

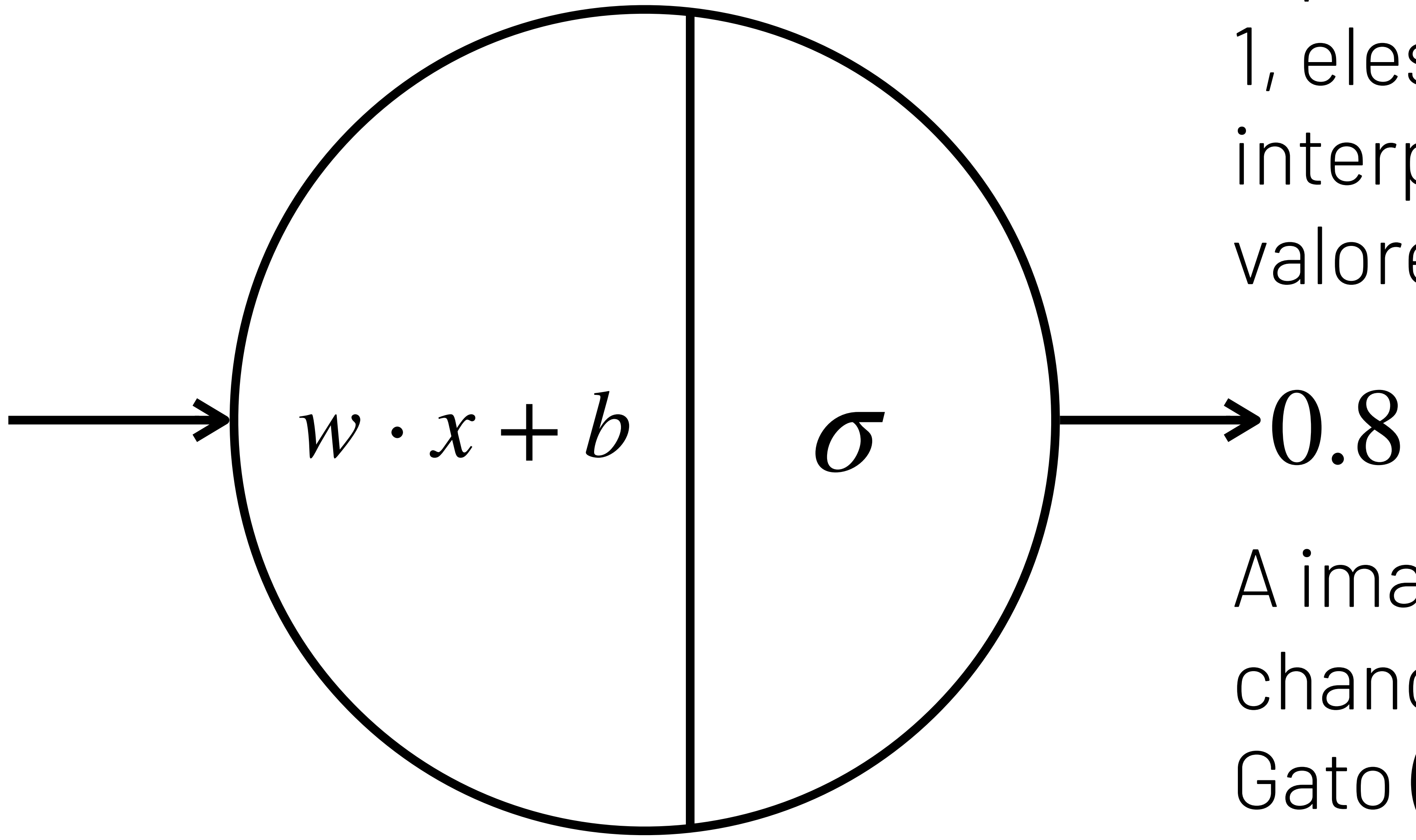


$$\sigma = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



Interpretação de Probabilidade

x



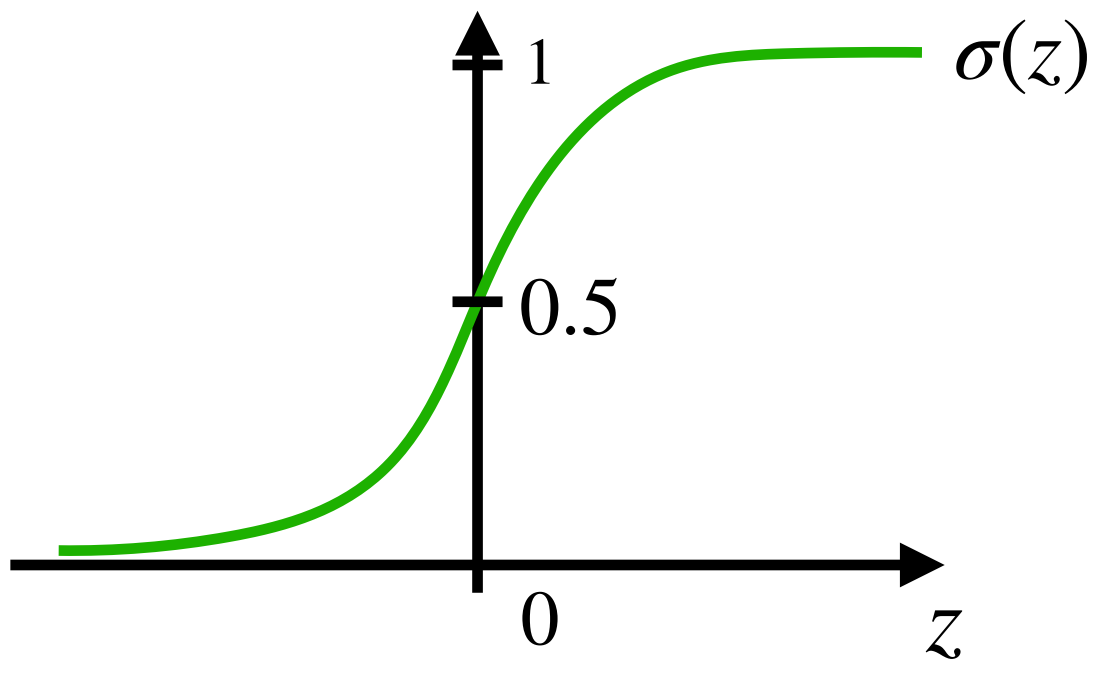
Como os valores da hipótese variam entre 0 e 1, eles podem ser interpretados como valores de probabilidade.

A imagem x tem 80% de chance de ser da classe Gato (1)

Fronteira de Decisão

Regressão Logística

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



Para encontrar o rótulo $\hat{y}$ com a hipótese, usamos um limiar:

$$\hat{y} = \begin{cases} 1, & \text{se } h(x) \geq 0.5 \\ 0, & \text{se } h(x) < 0.5 \end{cases}$$

Repare que o liminar acima é equivalente ao seguinte limiar:

$$\hat{y} = \begin{cases} 1, & \text{se } w \cdot x + b \geq 0 \\ 0, & \text{se } w \cdot x + b < 0 \end{cases}$$

Pois:

$h(x) \geq 0.5$ quando $z \geq 0$

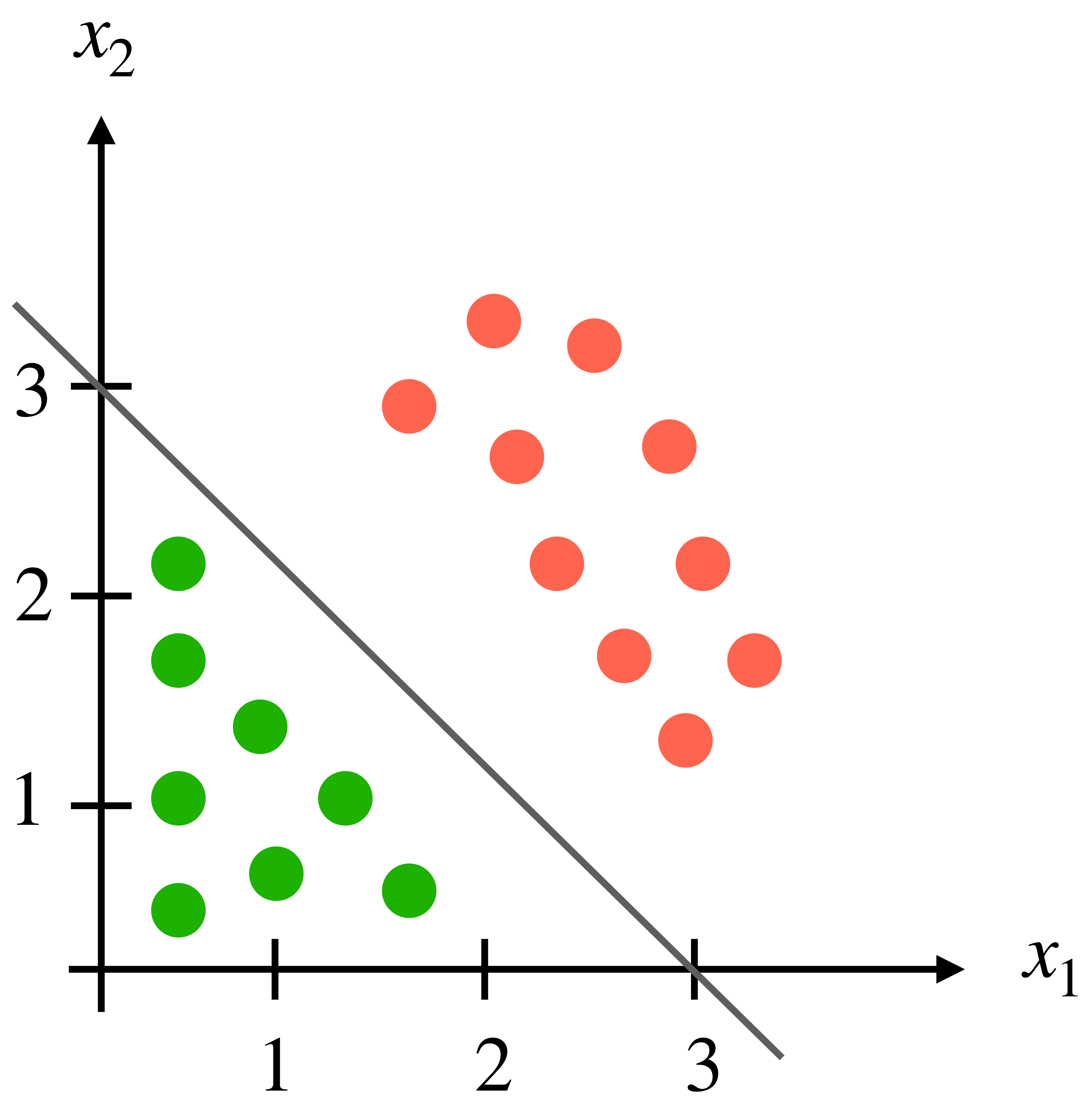
$h(x) < 0.5$ quando $z < 0$

UFV

Fronteira de Decisão

Regressão Logística

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



Considere a seguinde hipótese após o treinamento:

$$w_1 = 1, \; w_2 = 1, \; b = -3$$

$$\hat{y} = \begin{cases} 1, \text{ se } x_1 + x_2 - 3 \geq 0 \\ 0, \text{ se } x_1 + x_2 - 3 < 0 \end{cases}$$

A reta $x_1 + x_2 = 3$ é chamada de **fronteira de decisão**.

UFV

Função de Perda

Regressão Logística

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-w \cdot x + b}}$$

Dado um conjunto de dados $D = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$,
queremos $h(x_i') \approx y_i'$

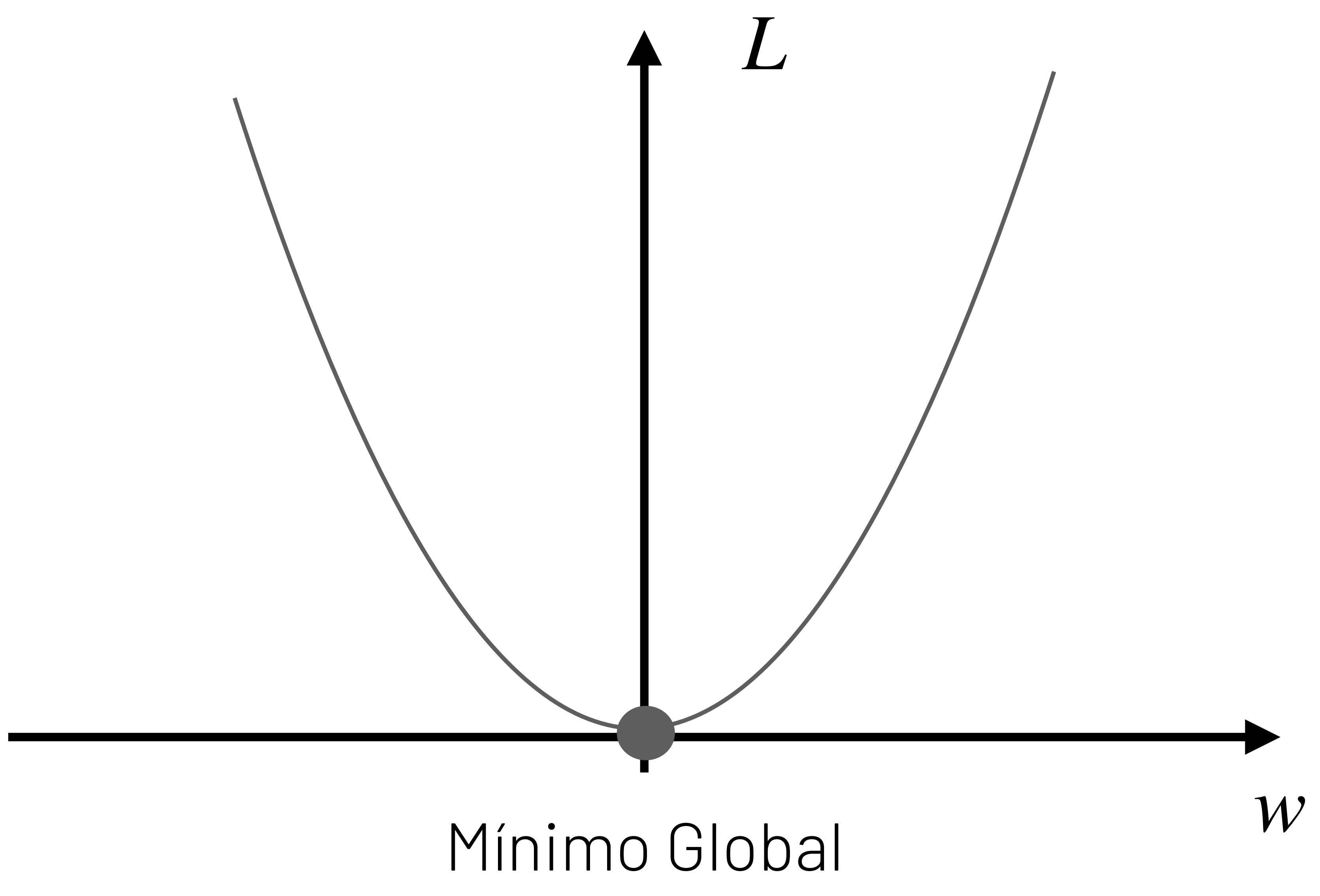
Poderíamos tentar usar a função de perda quadrática:

$$L(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - y_i)^2$$

Porém, ela produz um problema de otimização não-convexo!

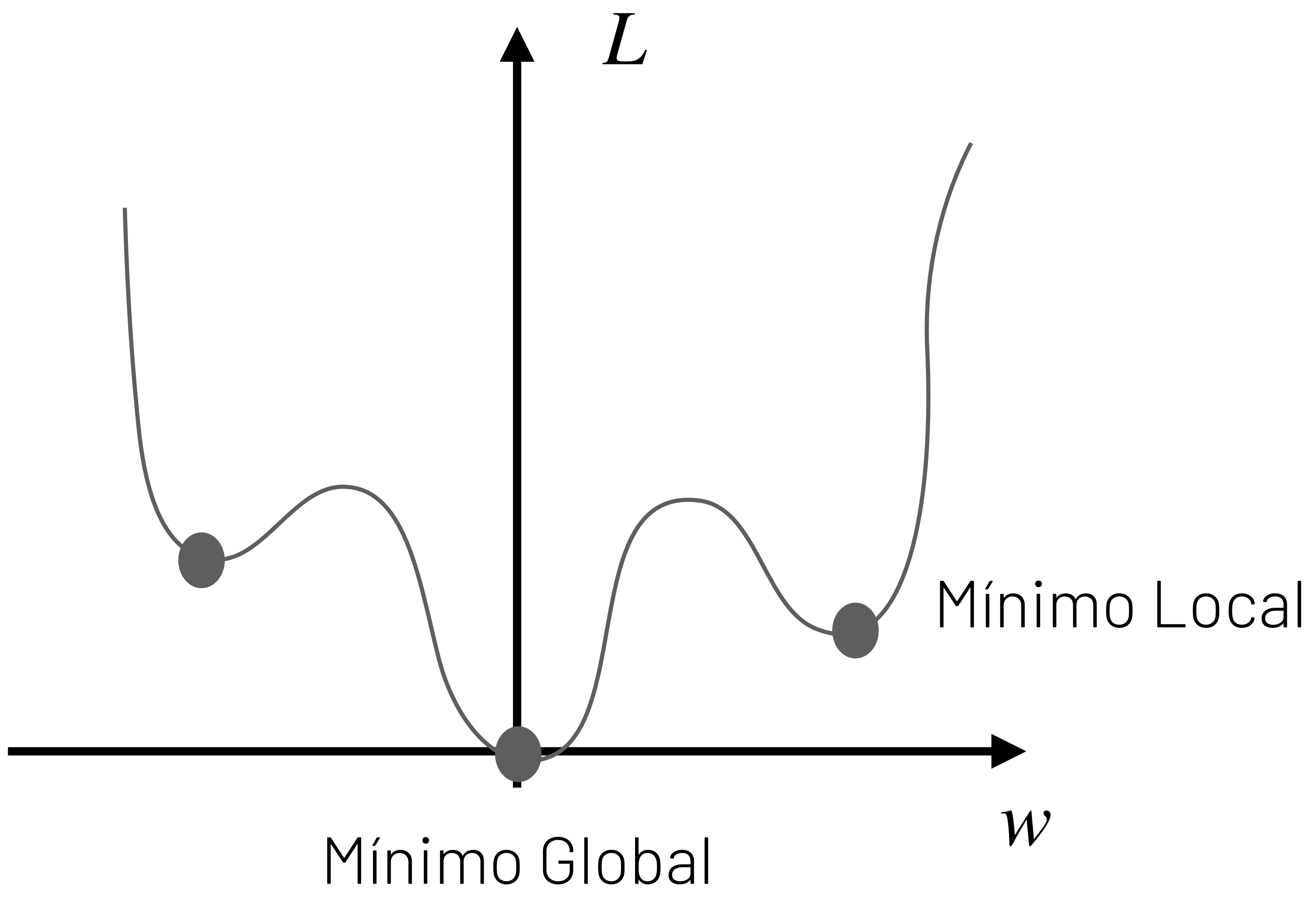
Otimização Convexa

Problema Convexo



Possui apenas um valor mínimo, chamado de mínimo global.

Problema Não-convexo



Além do mínimo global, possui mínimos locais.

UFV

Função de Perda

Entropia Cruzada Binária

Dado um conjunto de dados $D = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$, queremos $h(x_i') \approx y_i'$

Em regressão logística, utilizamos a função de entropia cruzada binária como função de perda:

$$L(\hat{y}, y) = -\,(y\ log\ \hat{y} + (1 - y)\ log(1 - \hat{y}))$$

Que produz um problema de otimização convexo!

Minimizar entropia cruzada em problemas de classificação é equivalente a **estimativa por máxima verossimilhança** (*maximum likelihood estimation*)!

Regressão Logística

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-w \cdot x + b}}$$

Função de Perda

Entropia Cruzada Binária

Dado um conjunto de dados $D = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$,
queremos $h(x_i') \approx y_i'$

$$P(y = 1 \mid x) = \hat{y}$$
$$P(y = 0 \mid x) = 1 - \hat{y}$$
$$P(y \mid x) = \hat{y}^y (1 - \hat{y})^{(1-y)}$$

$$log\ P(y \mid x) = log\ [\hat{y}^y (1 - \hat{y})^{(1-y)}]$$
$$log\ P(y \mid x) = y\ log\ \hat{y} + (1 - y) log\ (1 - \hat{y})$$

$$L(\hat{y}, y) = -\left(y\ log\ \hat{y} + (1 - y)\ log\ (1 - \hat{y})\right)$$

Regressão Logística

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-w \cdot x + b}}$$

UFV

Próxima aula

A4: Gradiente Descendente

Otimização de pesos da regressão logística com gradiente descendente.