INF721

2023/2

UFV

Aprendizado em Redes Neurais Profundas

A7: Backpropagation

Logística

Avisos

- Teste T2: Multilayer Perceptron na próxima aula!

Última aula

- Problemas linearmente não-separáveis
- Multilayer Perceptron (MLP)
- Forward Pass
- Funções de ativação

Plano de Aula

- Grafo computacional
- Backpropagation
  - Gradiente da Regressão Logística
  - Gradiente da MLP

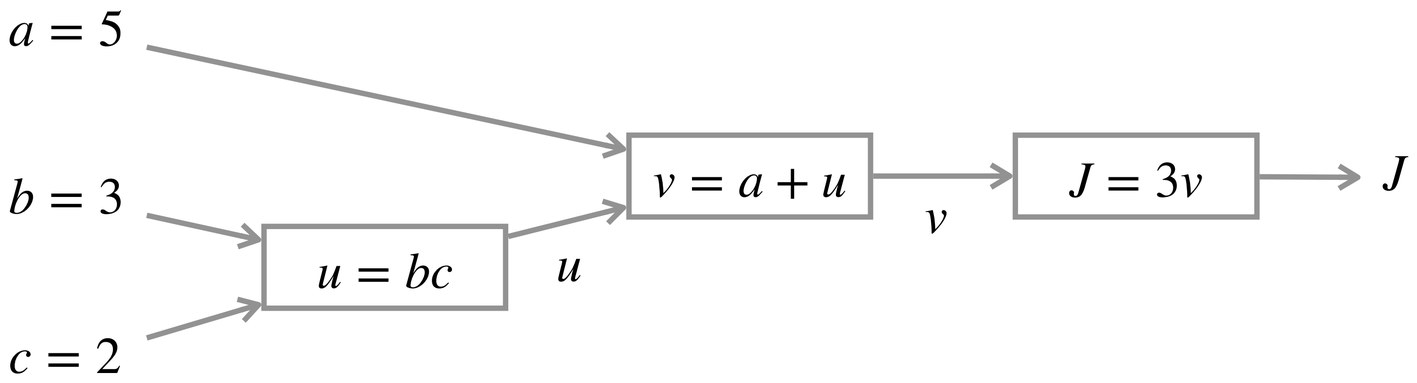
Grafo Computacional

Um grafo dirigido que descreve as expressões matemáticas de uma RNA passo a passo:

- Vértices representam operações
- Arestas representam entrada e saída

$$J(a,b,c) = 3(a + bc)$$

$$u = bc$$
$$v = a + u$$
$$J = 3V$$



Grafo Computacional e RNAs

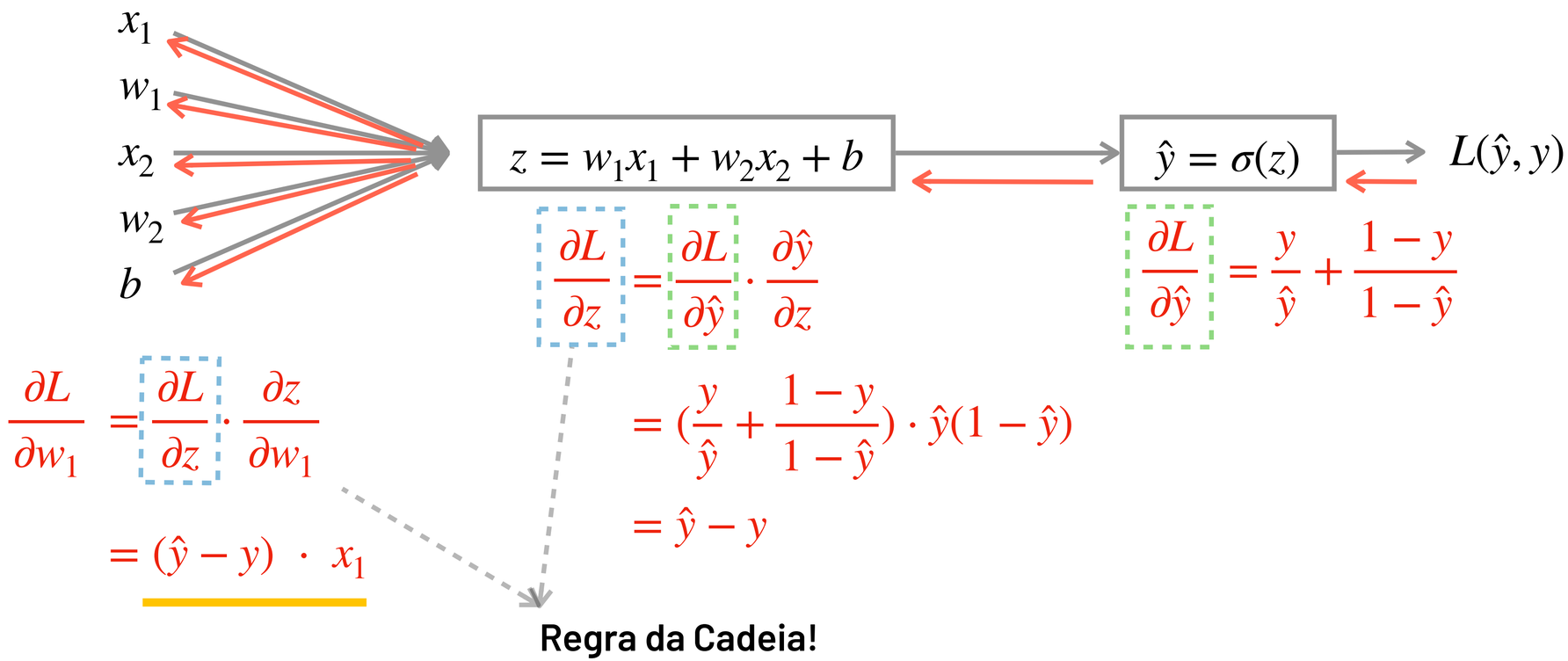
Grafos computacionais nos ajudam a calcular o gradiente de uma função de perda com relação aos pesos de uma RNA

Regressão Logística

$$z = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b$$

$$\hat{y} = h(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

$$L(\hat{y}, y) = -\, y\ log\ \hat{y} + (1 - y)\ log\ (1 - \hat{y}))$$



Retropropagação (Backprop)

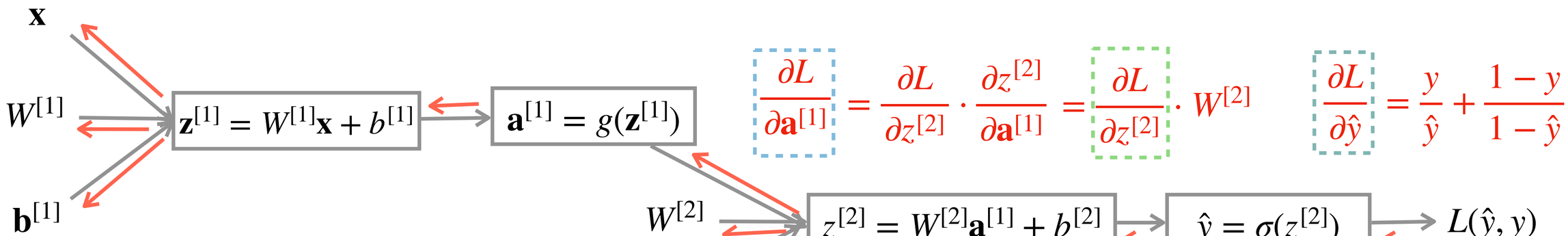
Calcular as derivadas parciais da função de perda com relação aos pesos $W^{[l]}$ e $\mathbf{b}^{[l]}$ para todas as camadas l de trás pra frente com a regra da cadeia.

MLP (2 camadas)

$$\mathbf{z}^{[1]} = W^{[1]}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{[1]} \qquad z^{[2]} = W^{[2]}\mathbf{a}^{[1]} + b^{[2]}$$

$$\mathbf{a}^{[1]} = g^{[1]}(\mathbf{z}^{[1]}) \qquad \hat{y} = \sigma(z^{[2]})$$

$$L(\hat{y}, y) = -\, y \; log \; \hat{y} + (1 - y) \; log \; (1 - \hat{y}))$$



$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot \frac{\partial z^{[2]}}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot W^{[2]} \qquad \frac{\partial L}{\partial \hat{y}} = \frac{y}{\hat{y}} + \frac{1-y}{1-\hat{y}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}^{[1]}}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot W^{[2]} \times \frac{dg^{[1]}}{d\mathbf{z}^{[1]}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial z^{[2]}} = (\frac{y}{\hat{y}} + \frac{1-y}{1-\hat{y}}) \cdot \hat{y}(1-\hat{y}) = \hat{y} - y$$

$$\frac{\partial L}{\partial W^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} \cdot \mathbf{x}^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial W^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{[1]}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial W^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot \frac{\partial z^{[2]}}{\partial W^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot a^{[1]^T}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot \frac{\partial z^{[2]}}{\partial b^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}}$$

UFV

Retropropagação (Backprop)

MLP (2 camadas)

$$\mathbf{z}^{[1]} = W^{[1]}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{[1]}$$
$$\mathbf{a}^{[1]} = g^{[1]}(\mathbf{z}^{[1]})$$
$$z^{[2]} = W^{[2]}\mathbf{a}^{[1]} + b^{[2]}$$
$$\hat{y} = \sigma(z^{[2]})$$

Função de Perda

$$L(h) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i \; log \; \hat{y}_i + (1 - y_i) \; log \; (1 - \hat{y}_i))$$

Inicialização do backpropagation

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{y}} = \frac{y}{\hat{y}} + \frac{1-y}{1-\hat{y}}$$

Derivada parcial da ativação da camada de saída $[2]$

$$\frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial z^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial \hat{y}} \cdot \hat{y}(1-\hat{y}) = \hat{y} - y$$

Derivadas parciais da parte linear da camada de saída $[2]$

$$\frac{\partial L}{\partial W^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot \frac{\partial z^{[2]}}{\partial W^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot a^{[1]^T}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot \frac{\partial z^{[2]}}{\partial b^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial z^{[2]}} \cdot W^{[2]}$$

Derivada parcial da ativação da camada escondida $[1]$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}^{[1]}}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} \cdot \frac{dg^{[1]}}{d\mathbf{z}^{[1]}}$$

Derivadas parciais da parte linear da camada escondida $[1]$

$$\frac{\partial L}{\partial W^{[1]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} \cdot \mathbf{x}^T$$

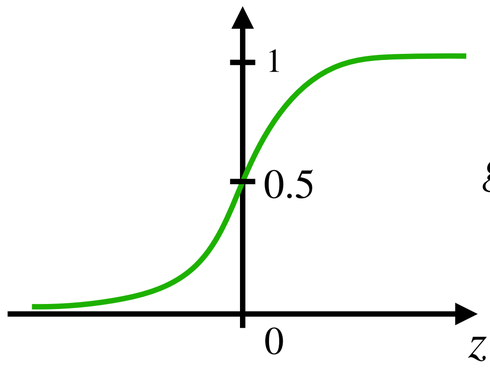
Esse termo depende da escolha de função de ativação

$$\frac{\partial L}{\partial b^{[2]}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{[1]}}$$

UFV

Derivadas das funções de ativação

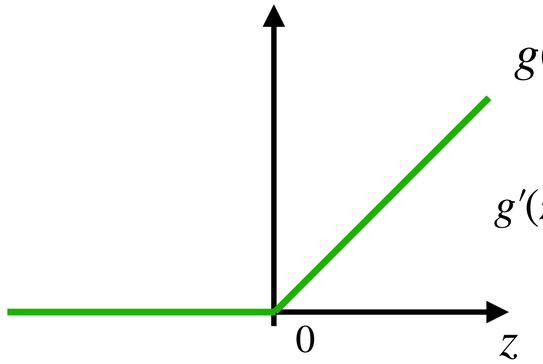
Logística (sigmoide)



$$g(z) = \frac{1}{(1 + e^{-z})}$$

$$g'(z) = g(z)(1 - g(z))$$

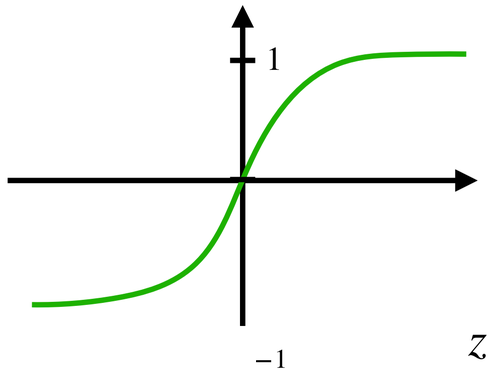
Unidade Linear Retificada (ReLU)



$$g(z) = max(0, z)$$

$$g'(z) = \begin{cases} 0 \text{ se } z < 0 \\ 1 \text{ se } z > 0 \\ \nexists, \text{ se } z = 0 \end{cases}$$

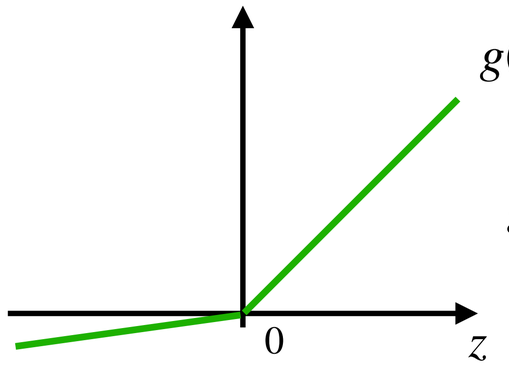
Tangete Hiperbólica



$$g(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$$

$$g'(z) = 1 - g(z)^2$$

Leaky ReLU



$$g(z) = max(0.01z, z)$$

$$g'(z) = \begin{cases} 0.01 \text{ se } z < 0 \\ 1 \text{ se } z > 0 \\ \nexists, \text{ se } z = 0 \end{cases}$$

UFV

Retropropagação com vetorização para L camadas

MLP (L camadas)

$$Z^{[l]} = W^{[l]} A^{[l-1]} + \mathbf{b}^{[l]}$$
$$\mathbf{A}^{[l]} = g^{[l]}(Z^{[l]})$$

$$A^{[0]} = X$$
$$A^{[L]} = \hat{Y}$$

Função de Perda

$$L(h) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i \; log \; \hat{y}_i + (1 - y_i) \; log \; (1 - \hat{y}_i))$$

$$dA^{[L]} = \frac{Y}{A^{[L]}} + \frac{1 - Y}{1 - A^{[L]}}$$

Inicialização do backpropagation

Derivada parcial da ativação da camada de saída $[L]$

$$dZ^{[L]} = dA^{[L]} \times \frac{dg^{[L]}}{dZ^{[L]}}$$

$$dW^{[L]} = \frac{1}{n} dZ^{[L]} A^{[L-1]T}$$

$$db^{[L]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} dZ^{[L](i)}$$

Derivadas parciais da parte linear da camada de saída $[L]$

$$dA^{[L-1]} = W^{[L]T} dZ^{[L]}$$

Derivada parcial da ativação da camada escondida $[L-1]$

$$dZ^{[L-l]} = dA^{[L-l]} \times \frac{dg^{[L-l]}}{dZ^{[L-l]}}$$

Esse termo depende da escolha de função de ativação

$$dW^{[L-l]} = \frac{1}{n} dZ^{[L-l]} A^{[L-l-1]T}$$

$$db^{[L-l]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} dZ^{[L-l](i)}$$

Para $l = [1, 2, \ldots, L-1]$, derivadas parciais da parte linear da camada escondida $[L-l]$

$$dA^{[L-l-1]} = W^{[L-l]T} dZ^{[L-l]}$$

Derivada parcial da ativação da camada escondida $[L-l-1]$

Próxima aula

A7: MLP em Numpy

Aula prática sobre implementação de redes neurais profundas com Numpy.